

## 仅依赖连通度的压缩感知多目标定位方法

刘磊<sup>1</sup>, 张建军<sup>1,2</sup>, 陆阳<sup>1,2</sup>, 卫星<sup>1,2</sup>, 韩江洪<sup>1,2</sup>

(1. 合肥工业大学计算机与信息学院, 安徽 合肥 230009;

2. 教育部安全关键工业测控工程研究中心, 安徽 合肥 230009)

**摘要:** 提出仅依赖连通度的多目标定位方法, 将多目标定位问题转化为基于压缩感知的稀疏向量重构, 解决室内参照物高密度分布的目标定位问题。定位方法仅以连通度为观测值, 运用最小化  $l_1$ -范数法求解目标位置。当观测数据压缩为 1 bit 时, 提出半正定松弛和不动点迭代法结合的目标求解算法。根据仿真实验结果, 与 MDS-MAP、DV-Hop 和 RSS-CS 方法进行比较得出, 仅连通度的非 1-bit 和 1-bit 量化的 CS 定位方法的平均定位误差小于 1 个网格, 且 2 种方法占用的比特数只相当于 RSS 定位方法占用比特数的  $\frac{1}{4}$  和  $\frac{1}{16}$ 。

**关键词:** 多目标定位; 压缩感知; 连通度; 1-bit 量化

中图分类号: TP 393.1

文献标识码: A

## Multiple targets localization via compressive sensing from mere connectivity

LIU Lei<sup>1</sup>, ZHANG Jian-jun<sup>1,2</sup>, LU Yang<sup>1,2</sup>, WEI Xing<sup>1,2</sup>, HAN Jiang-hong<sup>1,2</sup>

(1. School of Computer & Information, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China;

2. Engineering Research Center of Safety Critical Industrial Measurement & Control Technology, Ministry of Education, Hefei 230009, China)

**Abstract:** A multiple targets localization method was proposed from mere connectivity, and the multiple targets positioning problem was converted to sparse vector resolving by compressive sensing theory, which was applied to the indoor localization of intensive references distribution. The connectivity to the references was collected as the only measurement data, and targets locations were figured out by minimum  $l_1$ -norm algorithm. When measurement data was compressed to 1 bit, the fixed point iteration algorithm combined with semi-definite relax was proposed to figure out targets locations. As for the simulation results, compared with MDS-MAP, DV-Hop and RSS-CS algorithms, the average location error is less than 1 grid by the mere connectivity of  $N$ -bit and 1-bit quantization CS localization, of which the occupied bit quantity are reduced to less than 4 times and 16 times of RSS localization observation value respectively.

**Key words:** multiple targets localization, compressive sensing, connectivity, 1-bit quantization

### 1 引言

随着无线局域网 (WLAN, wireless local area network) 的普及, 无线接入点 (AP, access point) 普遍存在于室内空间且具有一定规模, 微软的 RADAR 室内定位系统就是利用 AP 充当定位参照物, 根据 AP 与移动终端的通信实现终端定位<sup>[1]</sup>。

WLAN 与无线传感器网络 (WSN, wireless sensor network) 相比, AP 需要持续的能量供应, 而 WSN 节点则不需要额外的硬件支持, 且单位时间消耗的能量也少于 AP<sup>[2]</sup>, 可以长时间、高密度地部署在定位空间内, 所以经济性优于同等规模的 WLAN<sup>[3]</sup>。

文献[4]利用 WSN 节点多跳传递数据的跳数信息, 将孤立的目标节点与全部参照物节点进行虚拟

收稿日期: 2015-04-02; 修回日期: 2015-12-12

通信作者: 张建军, zjj@ialab.hfut.edn.cn

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.61370088); 国家国际科技合作专项基金资助项目 (No.2014DFB10060)

**Foundation Items:** The National Natural Science Foundation of China (No.61370088), The National Foundation of International Cooperation in Science and Technology (No.2014DFB10060)

连通，在参照物不充足的情况下估计目标节点的位置。而文献[5]则避免了节点之间的通信，提出了分布式的压缩感知 (CS, compressive sensing) 定位方法，参照物节点只依据自身的观测信号，独立计算目标的位置。文献[6,7]则在目标节点信号场强的相干叠加前提下，提出了 CS 目标定位方法，区别在于前者建立和证明了满足 RIP 性质的信号包络衰减模型，而后者在前者基础上构建了信号场强的叠加模型，并在室内环境下取得了优良的定位效果。针对外界的噪声和干扰，文献[8]以 RSSI(received signal strength index)作为观测值，根据信号传播的对数衰减模型建立感知矩阵，并运用 CS 的最优化重构算法估计多个目标的位置。文献[9]将最优化方法中的梯度法与贪婪算法结合，在梯度追踪算法的基础上提出了变尺度的梯度追踪算法，将此算法运用于 CS 的多目标定位，可以增加定位的精度。文献[10]根据多个目标不准确测距得到的观测矩阵，并最小化该矩阵的秩，使观测误差的均方根最小，从而得到的目标位置与实际位置的距离一次差的均方根也是最小。文献[11]根据单个 WSN 节点的时域信号具有稀疏特征，建立固定的时频变换基函数，并将其白化使之满足 RIP 性质，因此在信号同频干扰的情况下也能通过 CS 方法恢复。

WSN 节点的数据量化方式对定位结果也能产生显著的影响，文献[12]在研究 1-bit 量化的分布式参数估计的均方误差 Rao-Cramer 下界时得出，如果观测噪声均匀分布在区间  $[-U, U]$  内，任何 1-bit 量化分布式估计的 MMSE 不低于  $\frac{U^2}{4K}$ 。根据文献[13]提出的最大似然分布式估计器，1-bit 量化的方差可以达到观测信号没有量化情形的  $\frac{p}{2}$  倍。文献[14]提出一种仅利用连通度实现 WSN 目标定位的 MDS-MAP 方法，将相邻节点之间传送的数据仅量化为几个比特，因此该方法对网络带宽的要求相对低。

本文对室内 WSN 环境下多目标定位问题进行了研究，针对有限的链路带宽，提出了一种仅依赖连通度的压缩感知多目标定位方法，并通过仿真验证所提出定位方法的可行性。

## 2 系统模型

### 2.1 问题描述

如图 1 所示， $\Omega$  为边长  $L$  的正方形区域， $M$  个

锚节点被等间隔地部署在  $\Omega$  内，它们作为多目标定位的参照物，任意最近相邻的锚节点之间的距离为  $d$ ，锚节点的覆盖半径  $r$  须满足<sup>[15]</sup>

$$r \geq d \left( 2 \cos \left( \frac{p}{6} \right) \right)^{-1} \quad (1)$$

因此， $M$  个锚节点对  $\Omega$  构成了蜂窝状的全覆盖，且任意一个目标节点在  $\Omega$  的任意位置至少与一个锚节点连通。

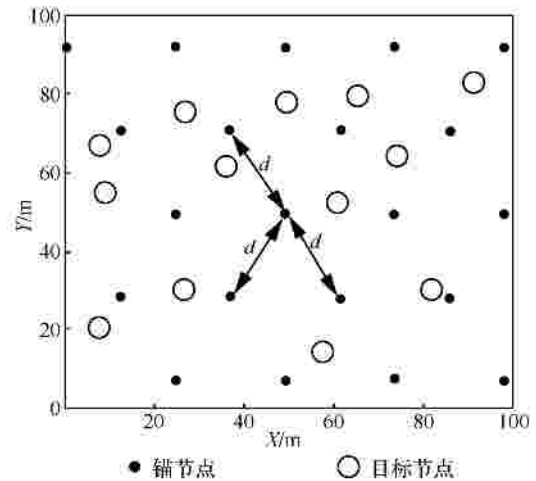


图 1 稀疏目标定位的系统模型

将多目标定位问题转化为 CS 的稀疏向量重构，需要将位置的表示从二维坐标转化为稀疏向量，其具体做法为：将  $\Omega$  均匀划分为  $N$  个网格，相邻网格之间等间隔，则网格质心的二维坐标集合为  $C$ ， $C = \{[x_1, y_1], L, [x_N, y_N]\}$ ，网格边长为  $D$ ， $D = \frac{L}{\sqrt{N}}$ 。

定义 1 设置长度为  $N$  的位置向量  $q$ ， $q \in \mathbb{C}^N$ 。 $q$  初始时为空间向量， $\{q(i) = 0\}_{i=1}^N$ ， $q$  的各个项分别指示被划分的网格。

假设目标节点  $k$  的二维坐标为  $[X_k, Y_k]$ ，网格  $i$  的质心坐标为  $[x_i, y_i]$ ，如果满足  $|X_k - x_i| < D$  且  $|Y_k - y_i| < D$ ，则认为目标节点  $k$  位于网格  $i$  内。此时，网格  $i$  对应的位置向量项  $q(i) = 1$ ；反之， $q(i) = 0$ 。如果存在  $s$  个目标节点位于网格  $i$  内，则  $q(i) = s$ 。所以， $K$  个目标节点的位置表示由一个位置向量  $q$  表示，且  $q$  的非零项个数必然是小于等于  $K$ 。因此，当  $K = N$  时，位置向量  $q$  具有稀疏性质<sup>[16]</sup>，满足运用 CS 求解的先验条件。

已知  $M$  个锚节点的二维坐标集合  $[X_m, Y_m]_{m=1}^M$ ，如果目标节点  $k$  满足

$$\sqrt{|X_k - X_m|^2 + |Y_k - Y_m|^2} \quad r \quad (2)$$

则表示目标节点  $k$  与锚节点  $m$  是连通的, 记作  $Y_{k,m} = 1$ ; 否则,  $Y_{k,m} = 0$ 。  $M$  个锚节点分别与目标节点  $k$  的连通状态可以由一个连通度向量  $Y_k$  表示,  $Y_k = \{Y_{k,m}\}_{m=1}^M$ ,  $Y_k \in \mathbb{C}^M$ 。由于  $Y_k$  的项都是 0 或 1, 所以发送  $Y_k$  所需要的链路带宽至少为  $M$  bit。

### 2.2 定位过程

本文提出的仅依赖连通度的定位方法包括: 连通度收集、位置向量的重构和定位误差的衡量。如图 2 所示, 假设  $K$  个目标节点形成单链状的 WSN 路由, 每个目标节点独立建立自己的连通度向量, 而 sink 节点则汇集  $K$  个连通度向量, 对于连通度的收集方式可分为无压缩收集和压缩收集。

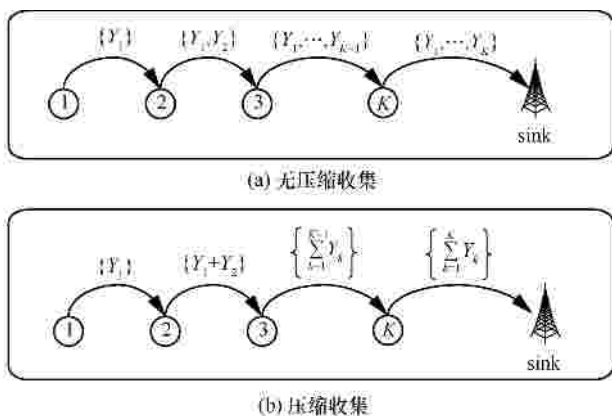


图 2 观测向量的收集方式

MDS-MAP 采用无压缩收集, 这使单个目标节点发送的数据量总是比前序节点增加  $M$  bit, 造成离 sink 节点最近的目标节点  $K$  发送的数据量是目标节点 1 的  $K$  倍, 会导致目标节点  $K$  加速消耗能量。如图 2 (b) 所示, 压缩收集是指目标节点转发的数据都是经过压缩的数据, 其过程是: 目标节点  $k$  将前序节点  $k-1$  发送的向量  $V_{k-1}$  与自身的连通度向量  $Y_k$  求和后形成新的向量  $V_k = V_{k-1} + Y_k$ , 再将  $V_k$  发送给后继节点,  $V_1 = Y_1$ 。由于每次只发送向量  $V_k$ , 使每个目标节点发送的数据量都相同, 最终汇集到 sink 节点的连通度数据构成连通度向量  $Y$ ,  $Y = \sum_{k=1}^K Y_k$ ,  $Y$  是本文定位方法唯一依赖的观测值。

定义 2 非 1-bit 量化是指  $K$  个目标节点在压缩收集过程中, 如图 2(b) 所示, 目标节点要发生的比特数大于 1。

对于发送向量  $V_k$  而言, 如果任意项  $V_{k,m}$  是无符号整数型, 且满足  $0 \leq V_{k,m} \leq K$ 。采用非 1-bit 量化, 其占用的比特数为  $\text{lb}K$  bit。根据压缩收集方式, 发送  $V_k$  需要  $M \text{lb}K$  bit。

定义 3 1-bit 量化是指图 2(b) 所示的压缩收集过程中, 每个目标节点在转发连通度向量之前, 将向量的每个元素都压缩为 1-bit。

相比于非 1-bit 量化, 发送的数据经过 1-bit 量化会减少到  $M$  bit。因此, 目标节点  $K$  发送的数据量通过压缩收集, 其数据量是无压缩收集的  $\frac{1}{K}$ 。而在压缩收集基础上, 1-bit 量化又比非 1-bit 量化缩小了  $\text{lb}K$  倍, 很大程度减少了节点  $K$  能量消耗的速度, 并降低了定位产生的链路消耗。

问题描述中, 目标节点个数  $K$ 、锚节点个数  $M$  以及划分的网格数  $N$  的数量关系通常为  $K = M < N$ , 如果  $K$ 、 $M$  和  $N$  能满足条件

$$M \geq K \lg\left(\frac{N}{K}\right) \quad (3)$$

则定位问题可以转化为压缩感知的稀疏向量重构<sup>[5]</sup>, 常用的重构算法是最小化  $l_1$ -范数法。本文根据 2 种不同的量化情形, 分别采用 2 种位置向量重构算法: 非 1-bit 量化时, 采用最小化  $l_1$ -范数重构算法; 1-bit 量化时, 由于观测向量  $Y$  的数据都被量化为 +1 或 -1, 无法采用最小化  $l_1$ -范数算法重构位置向量  $q$ 。因此, 根据重构一致性原则, 提出半正定规划和不动点迭代结合的重构算法。

定义 4 仅依赖连通度压缩感知定位方法的定位误差由收集的连通度向量  $Y$  以及定位得到的位置向量  $q$  和倒推的连通度向量  $Y'$  的单位欧式距离  $e$  表示。

$$e = \frac{\|Y - Y'\|_2}{\|Y\|_2 \|Y'\|_2}, \quad e \geq 0 \quad (4)$$

当  $e = 0$  时, 所有目标节点都被准确估计在正确的网格内。  $e$  越接近于 0, 估计的位置就越准确。因此, 在不了解目标节点实际位置的情况, CS 方法通过定位误差  $e$  评价定位的效果。

### 2.3 锚节点的不规则覆盖

由于多径等其他因素的存在, 室内的无线信号覆盖通常不是规则状的, 在构建仿真环境时, 根据信号传播的各向异性 (non-isotropic), 引入不规则度 (DOI, degree of irregularity), DOI 为 [0,1] 内的实

数,  $DOI$  越高, 覆盖越不规则, 以此描述覆盖的不规则程度。

定义 5 给定覆盖不规则度  $DOI$ , 设不规则因子  $K_i$  [17] 为

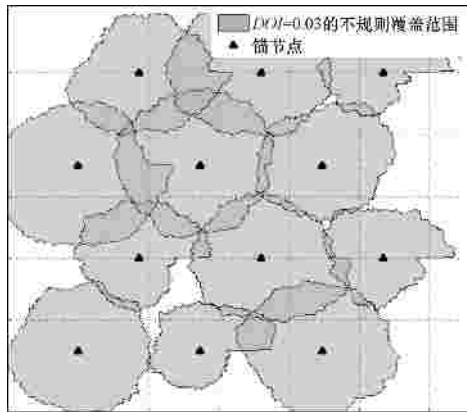
$$K_i = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ K_{i-1} \pm \text{rand}(\cdot) DOI, & 1 < i \leq 360 \end{cases} \quad (5)$$

且  $|K_1 - K_{360}| \leq DOI$ ,  $\text{rand}(\cdot)$  为生成 (0,1) 随机数的函数。

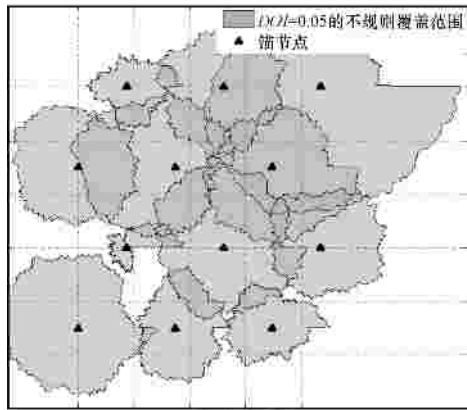
以锚节点  $m$  为中心, 均匀取其周围的 360 个方位点, 而点  $j$  与锚节点  $m$  的相对极坐标为  $g_j(r_j, a_j)$ ,  $1 \leq j \leq 360$ 。

$$\begin{cases} r_j = r(1 + K_i) \\ a_j \in [1^\circ, L, 360^\circ] \end{cases} \quad (6)$$

根据式(5)和式(6), 360 个点连成的不规则形状构成锚节点的覆盖区域。如图 3 所示, 多个锚节点构成的不规则覆盖, 只有目标节点位于着色的不规则区域内, 才能与锚节点形成连通。由于与规则覆盖存在差异, 通过  $DOI$  模拟实际的定位场景, 能够验证多目标 CS 定位方法的有效性。



(a)  $DOI=0.03$



(b)  $DOI=0.05$

图 3 锚节点的不规则覆盖

### 3 非 1-bit 量化的位置向量重构算法

针对连通度向量满足定义 2 时, 采用非 1-bit 量化的位置重构算法恢复  $K$  个目标节点所在的网格位置, 即定义 4 所示的位置向量  $\hat{q}$  的非 0 项索引位置。非 1-bit 量化位置重构算法的步骤包含建立感知矩阵和最小化  $l_1$ -范数求解。

#### 3.1 建立感知矩阵

运用最小化  $l_1$ -范数算法的前提是建立一个感知矩阵  $A$ ,  $A$  是一个常系数矩阵,  $A$  能够与位置向量  $q$  构成连通度向量  $Y$

$$Y = Aq \quad (7)$$

其中,  $q$  是未知的, 而  $Y$  是已知的, 感知矩阵  $A$  建立的依据是已知的锚节点位置与覆盖信息: 根据定义 5, 当不规则度  $DOI$  为 0 时, 锚节点的覆盖范围为圆盘状, 目标节点只有位于圆盘内, 才能与该锚节点连通。如图 4 所示, 建立长度为  $N$  的一维向量  $A_m$ ,  $A_m \in \mathbb{C}^N$ , 当锚节点位于  $m$  点, 且覆盖的圆盘半径为  $r$  时, 如果网格  $i$  的质心位于圆盘内, 则  $A_{m,i} = 1$ , 否则,  $A_{m,i} = 0$ 。  $M$  个位置和覆盖半径已知的锚节点可以得到  $M$  个一维向量, 这些先验的向量组成了感知矩阵  $A$ , 且  $A$  满足式(7)。

同时, 将最小化  $l_1$ -范数求解得到的位置向量  $q$  乘以感知矩阵  $A$ , 可以得到倒推的位置向量  $Y'$ 。与 MDS-MAP 方法不同, MDS-MAP 的定位误差需要知道目标节点位置, 而本文的压缩感知定位方法能够在定位过程中直接计算定位误差, 这便于利用定位误差进行多次误差收敛的迭代定位计算, 提高定位精度。

将感知矩阵  $A$  经过施密特 (Schmidt) 正交化和单位化后, 形成标准正交基  $A^*$ ,  $A^* \in R^{M \times N}$ ,  $A^*$  将解空间均限制在单位化的范数空间内。

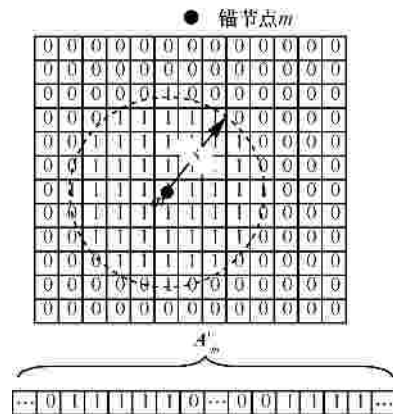


图 4 感知矩阵建立的原理

设白化矩阵为  $Q, Q \in R^{M \times M}$ 。

$$Q = A^* A^+ \quad (8)$$

$A^+$  为  $A^*$  的一个 Moore-Penrose 伪逆, 将连通度向量  $Y$  经过预白化后得到  $F$

$$F = QY, F \in R^M \quad (9)$$

$Q$  对  $Y$  进行线性变换, 使其均值为零, 方差为 1, 消除了  $Y$  各元素项之间的相关性。将式(8)代入式(9)得到

$$F = (A^* A^+) Aq = A^* q \quad (10)$$

与  $Y$  相比, 利用白化的向量  $F$  求解  $q$ , 能提高  $q$  的分辨率, 从而减少观测噪声对其重构精度的影响。

### 3.2 最小化 $l_1$ -范数求解

由于感知矩阵  $A$  不是方阵, 则  $q$  为变量的式(10)实际是没有唯一解的欠定方程组, 但加上其他条件进行凸优化求解, 可以缩小解的范围。由于  $q$  是稀疏向量, 根据压缩感知理论, 以  $q$  的  $l_0$ -范数最小化或  $l_1$ -范数最小化为目标, 都能求出唯一的最稀疏解, 但是  $l_1$ -范数比  $l_0$ -范数有更好的优化求解特性而被广泛应用<sup>[18]</sup>。

因此, 本文将凸优化问题描述如下

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \arg \min \|q\| \\ \text{s.t. } & F = A^* q \end{aligned} \quad (11)$$

以最小化  $l_1$ -范数法重构位置向量  $\hat{q}$ , 并提取  $\hat{q}$  的  $K$  个最大项所在的索引位置, 得到  $K$  个目标节点所在的网格位置。  $F$  为观测向量,  $F$  为  $q \in \mathbb{R}^M$  的仿射集合, 且  $\|q\|_1$  也是凸集, 所以式(11)满足凸优化求解的要求。

$\hat{q}$  为  $F$  投影在线性空间  $A^*$  中的一个点。如图 5 所示, 经过凸优化得出的  $\hat{q}$ , 其  $l_0$ -范数是大于  $K$  的,  $\|\hat{q}\|_0 > K$ , 即  $\hat{q}$  的非零项个数大于  $K$ 。将  $\hat{q}$  的元素项按绝对值降序排序, 提取最大  $K$  个项的位置索引  $x = \{V_1, L, V_K\}$ 。

定义一个长度为  $N$  的空向量  $q^*$ , 并根据  $\hat{q}$  非 0 项的索引  $x$  指示的位置填充到  $q^*$ , 得到估计的位置向量  $q^*$

$$q_i^* = \begin{cases} 1, & i \in x \\ 0, & i \notin x \end{cases} \quad (12)$$

其中,  $\|q^*\|_0 = K, \|q^*\|_2 = \sqrt{K}$ , 此时的  $q^*$  非零项指示的网格就是目标节点所在的网格。

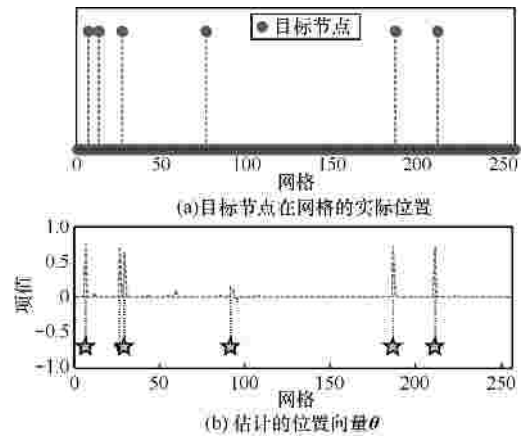


图 5 估计的位置向量与目标实际位置的对比

## 4 1-bit 量化的位置向量重构算法

### 4.1 观测向量 1-bit 量化的 CS 定位模型

观测向量  $F$  的 1-bit 量化和转发通过如下过程实现, 且假定每个目标节点均保存感知矩阵  $A^*$  和白化矩阵  $Q$ , 转发向量记为  $V_k, V_k$  的长度为  $M$  bit, 所以目标节点发送数据量均为  $M$  bit。

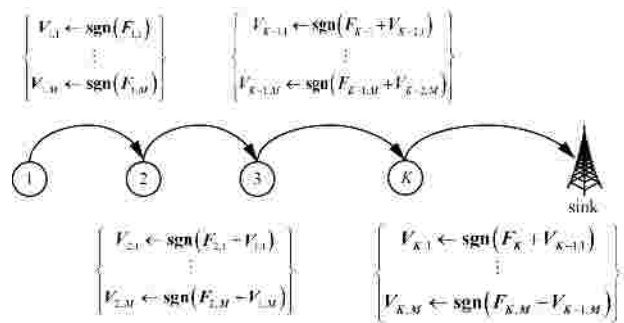


图 6 1-bit 量化的压缩收集方式

#### 初始化

1) 目标节点  $k$  与所有锚节点的连通度向量记为  $Y_k, Y_k \in \mathbb{C}^M$ 。

2) 根据式(9), 目标节点  $k$  对连通度向量  $Y_k$  进行白化, 得到目标节点  $k$  的观测向量  $F_k, F_k = QY_k$ 。

#### 过程

1) 目标节点 1 将  $F_1$  进行 1-bit 量化, 并记入  $V_1, V_1 \leftarrow \text{sgn}(F_1)$ 。

2) 发送  $V_1$  至目标节点 2。

3) 目标节点 2 将自身的  $F_2$  与  $V_1$  求和后, 再 1-bit 量化,  $V_2 \leftarrow \text{sgn}(F_2 + V_1)$ 。

4) 发送  $V_2$  至下个目标节点, 重复 3), 直到汇集至 sink, 形成  $V_K$ 。

如图 6 所示,  $\text{sgn}(\cdot)$  为观测向量的量化函数,

$$\text{sgn}(F_k(i)) = \begin{cases} +1, & F_k(i) > +t \\ -1, & F_k(i) < -t \end{cases} \quad (13)$$

设  $t$  为量化门限,  $0 < t < \min\{V_k(i)\}_{i=1}^M$ 。

根据压缩感知原理, 如果最终的稀疏向量解  $\hat{q}$  被准确重构, 则 sink 得到的向量  $V_k$  与  $\text{sgn}(A^* \hat{q})$  是相同的。

$$V_k \equiv \text{sgn}(A^* \hat{q}) \quad (14)$$

如果将式(14)作为等式约束, 是无法通过最小化  $l_1$ -范数法求解的。因此, 本文将式(11)的严格凸优化问题松弛为半正定规划 (SDP) 问题, 以求得最优近似解  $\hat{q}$

$$\begin{aligned} \hat{q} = \arg \min & (\|q\|_1 + l \| \text{sgn}(A^* q) - V_k \|_2) \\ \text{s.t. } & YA^* q = 0 \\ & \|q\|_2 = 1 \end{aligned} \quad (15)$$

其中,  $l \| \cdot \|$  为惩罚项, 用于均衡待解向量  $\hat{q}$  的  $l_1$ -范数最小与 1-bit 量化噪声最小;  $Y = \text{diag}(V_k)$ ,  $\text{sgn}(A^* q)$  与  $V_k$  的内积具有显著的半正定性,  $\langle \text{sgn}(A^* q), V_k \rangle \geq 0$ , 且  $A^* q$  为凸函数。因此, 以  $YA^* q = 0$  为不等式约束,  $YA^* q = 0$  构成单边的仿射集合;  $\|q\|_2 = 1$  为几何等式约束, 且  $\|q\|_2 = 1$  为  $l_2$ -范数的单位球, 式(15)满足了 SDP 求解的条件。

### 4.2 不动点迭代的求解算法

严格凸优化的约束是由等式约束和不等式约束构成, 它们都是多项式等式, 式(15)的约束  $\|q\|_2 = 1$  是必不可少的, 可将其转化无穷多个对应的多项式等式。因此, 在对式(15)直接进行 SDP 时, 可能导致  $\hat{q}$  无解。本文将式(15)的问题求解分解为 2 个步骤完成。

1) 运用 SDP 方法对式(15)求解, 得到满足约束  $YA^* q = 0$  的初始解  $\hat{q}_0$

$$\begin{aligned} \hat{q} = \arg \min & (\|q\|_1 + l \| \text{sgn}(A^* q) - V_k \|_2) \\ \text{s.t. } & YA^* q = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

2) 构造代价函数  $J(\cdot)$ , 并运用不动点迭代法

(FPI, fixed point iteration) 对初始解  $\hat{q}_0$  进行逐步求精, 将  $J(\cdot)$  在  $l_2$ -范数球的表面做单边梯度对偶下降 (one-sided gradient quadratic descent), 直到解  $\hat{q}_k$  的  $l_2$ -范数不断逼近 1。

如图 7 所示, 为保证重构一致性, 设松弛函数  $f(x, y)$  惩罚重构后的观测向量与原观测向量的不一致。

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \langle x, y \rangle \geq 0 \\ \langle x, y \rangle, & \langle x, y \rangle < 0 \end{cases} \quad (17)$$

在运用不动点迭代法时, 将式(15)的目标函数松弛为代价函数

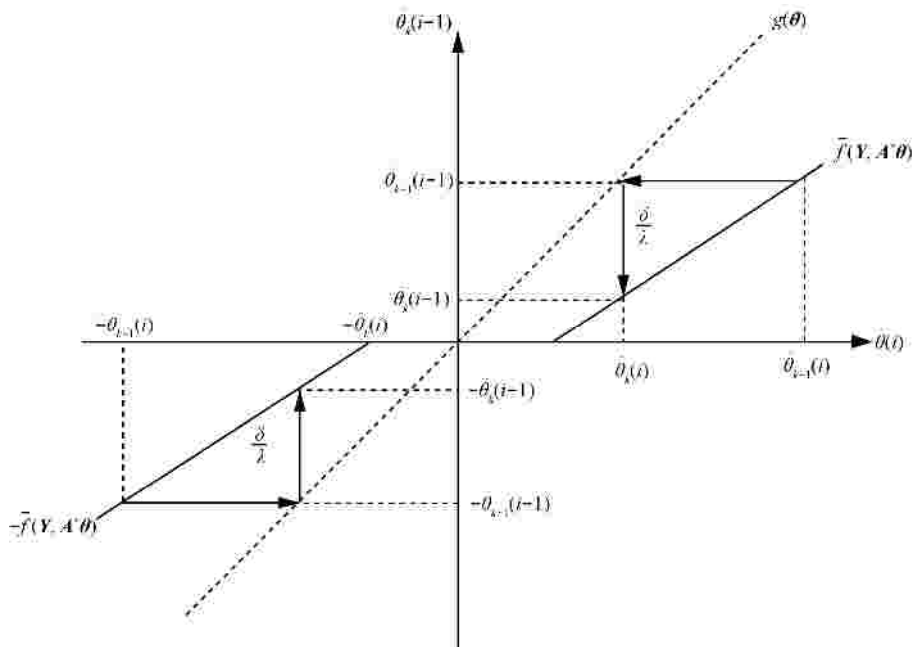


图 7 不动点迭代法收敛的原理

$$J(\mathbf{q}) = g(\mathbf{q}) + l \bar{f}(\mathbf{Y}, \mathbf{q}) \quad (18)$$

其中,

$$\begin{cases} \bar{f}(\mathbf{Y}, \mathbf{q}) = \sum_i f(\mathbf{Y}_i, \mathbf{A}_i^* \mathbf{q}) \\ g(\mathbf{q}) = \|\mathbf{q}\| \end{cases} \quad (19)$$

不动点迭代法是在  $l_2$ -单位范数球表面进行固定步长的单边梯度投影,其梯度下降速率与惩罚因子  $l$  和给定步长  $d$  相关。如果  $l_2$ -单位范数球表面存在正确的解  $\mathbf{q}$  则代价函数  $J(\mathbf{q})$  下降的梯度一定收敛至 0。

$$J'(\mathbf{q}) = 0 = g'(\mathbf{q}) + l (\mathbf{Y}\mathbf{A}^*)^T \bar{f}'(\mathbf{Y}, \mathbf{A}^* \mathbf{q}) \quad (20)$$

$$\Rightarrow \frac{g'(\mathbf{q})}{l} = -(\mathbf{Y}\mathbf{A}^*)^T \bar{f}'(\mathbf{Y}, \mathbf{A}^* \mathbf{q}) \quad (21)$$

其中

$$g'(q_i) = \begin{cases} -1, & q_i < 0 \\ +1, & q_i > 0 \end{cases} \quad (22)$$

$$\left( \bar{f}'(\mathbf{q}) \right)_i = \begin{cases} -q_i, & q_i < 0 \\ 0, & q_i > 0 \end{cases} \quad (23)$$

不动点迭代算法 (FPI) 的求解过程如下。

初始化

- 1) 对式(16)进行 SDP, 生成种子  $\mathbf{q}_0$ 。
- 2) 梯度下降步长  $d$ 。
- 3) 迭代计数  $k$ 。

过程

- 1) 迭代计数增 1:  $k \leftarrow k + 1$ 。
- 2) 单边梯度计算

$$\bar{f}_k \leftarrow (\mathbf{Y}\mathbf{A}^*)^T \bar{f}'(\mathbf{Y}, \mathbf{A}^* \mathbf{q}_{k-1})$$

- 3) 在  $l_2$ -范数的单位球表面进行投影

$$\hat{f}_k \leftarrow \bar{f}_k - \langle \bar{f}_k, \mathbf{q}_{k-1} \rangle \mathbf{q}_{k-1}$$

- 4) 单边梯度下降

$$\mathbf{h} \leftarrow \hat{f}_{k-1} - d \hat{f}_k, \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$$

- 5)  $l_2$ -单位范数逼近

$$(u_i) \leftarrow \text{sgn}(h_i) \max \left\{ |h_i| - \frac{d}{l}, 0 \right\}$$

- 6) 正则化

$$\mathbf{q}_k \leftarrow \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_2}$$

- 7) 如果  $h$  大于给定阈值  $e$ , 则转到 1)。

- 8) 输出  $\mathbf{q}_k$ 。

在 FPI 算法的步骤 5) 中,  $\mathbf{q}_{k-1}$  被量化的门限为  $\frac{d}{l}$ , 只有当惩罚项  $l$  越大, FPI 算法输出的  $\mathbf{q}_k$  越接近式(15)输出的最优解  $\mathbf{q}^*$ 。FPI 算法能够在多项式时间内输出结果, 因此  $l$  相同的情况下, FPI 算法不会导致  $\mathbf{q}$  无解的情况。

## 5 仿真实验及分析

### 5.1 实验场景

Matlab 2013b 作为定位的仿真工具, 目标节点分布的空间设在边长  $L$  为 100 m 的正方形区域  $\Omega$ ,  $\Omega$  被均匀划分 1 024 个网格,  $N=1 024$ 。  $M$  个锚节点等间隔地排列在  $\Omega$  内, 任意最近相邻的锚节点之间的距离为  $d$  和覆盖半径  $r$  均满足

$$r \geq d \left( 2 \cos \left( \frac{\pi}{6} \right) \right)^{-1}$$

如图 8 所示, 分别随机部署 20 和 40 个目标节点在  $\Omega$  内,  $K$  为目标节点个数。

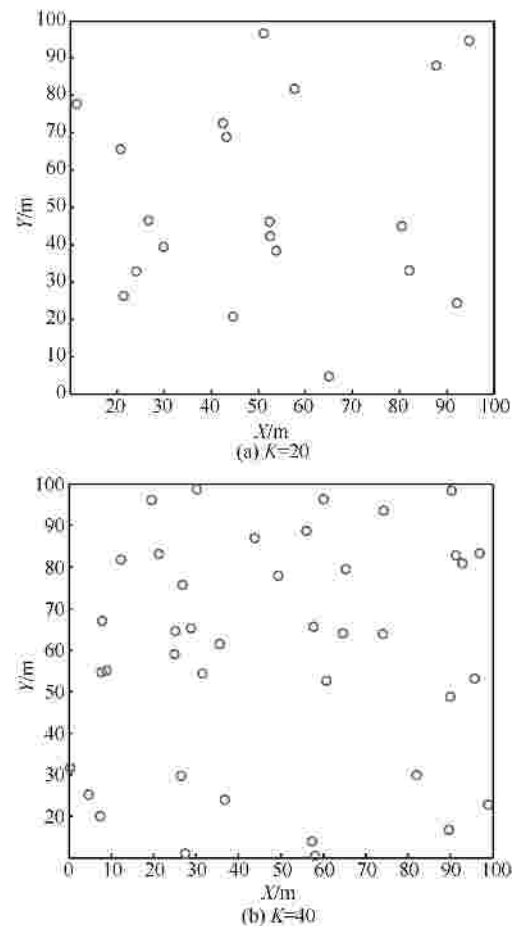


图 8 目标节点的分布场景

### 5.2 非 1-bit 量化的 CS 定位的仿真实验分析

在该实验中,连通度在非 1-bit 量化的情况下,通过锚节点个数  $M$  和覆盖半径  $r$ ,分别对定义 4 的定位误差  $e$  进行考察,验证最小化  $l_1$ -范数法的性能。

如图 9 所示,尽管  $M$  不同,但是定位误差  $e$  都是随着  $r$  的增加,呈凹状的变化趋势,基本符合定位方法的理论精度。如果锚节点覆盖半径  $r$  过小,目标节点获得的连通度太小,或者  $r$  过大,获得的连通度太大,都使感知矩阵  $A$  很大程度地偏离满秩的要求,影响了最小化  $l_1$ -范数法的重构精度,因此  $r$  应当具有合理的区间。从图 9(a)和图 9(b)可见,在锚节点覆盖规则的情况下,在  $30 < r < 50$  的情况下,最小化  $l_1$ -范数法使定位误差维持在零,由此推断感知矩阵  $A$  达到了满秩。

显而易见,  $M$  越大,  $e$  越小。当  $M = 484$  时,

很大程度上确保所有目标节点的定位完全准确,这说明量化后的观测向量  $F$  保留了足够与目标位置相关的信息量。

如图 9(c)和图 9(d)所示,存在不同 DOI 的不规则覆盖下,定位误差  $e$  随着  $r$  的增加,呈现加剧递增的趋势。但是,当  $r$  位于  $[5, 22]$  时,锚节点覆盖半径可处在经济部署的范围内,且定位误差  $e$  总体较小,也验证 CS 方法适合在复杂室内环境的多目标定位。

如图 10 所示,  $DOI = 0$  时,当  $K$  足够大时,位置向量无法满足稀疏性质,因此误差  $e$  随着  $K$  的增加而升高。 $DOI = 0.05$ ,  $M = 218$  时的误差  $e$  总体却小于  $M = 484$  时; $DOI = 0.01$ ,  $M = 484$  时的误差  $e$  下降的比较显著。由此可见,相对于  $K$  而言,定位误差  $e$  与 DOI 的大小关系更密切。值得注意的是,当  $K$  位于  $[80, 200]$  时,除了  $DOI = 0.05$  以及  $M = 484$ ,其他

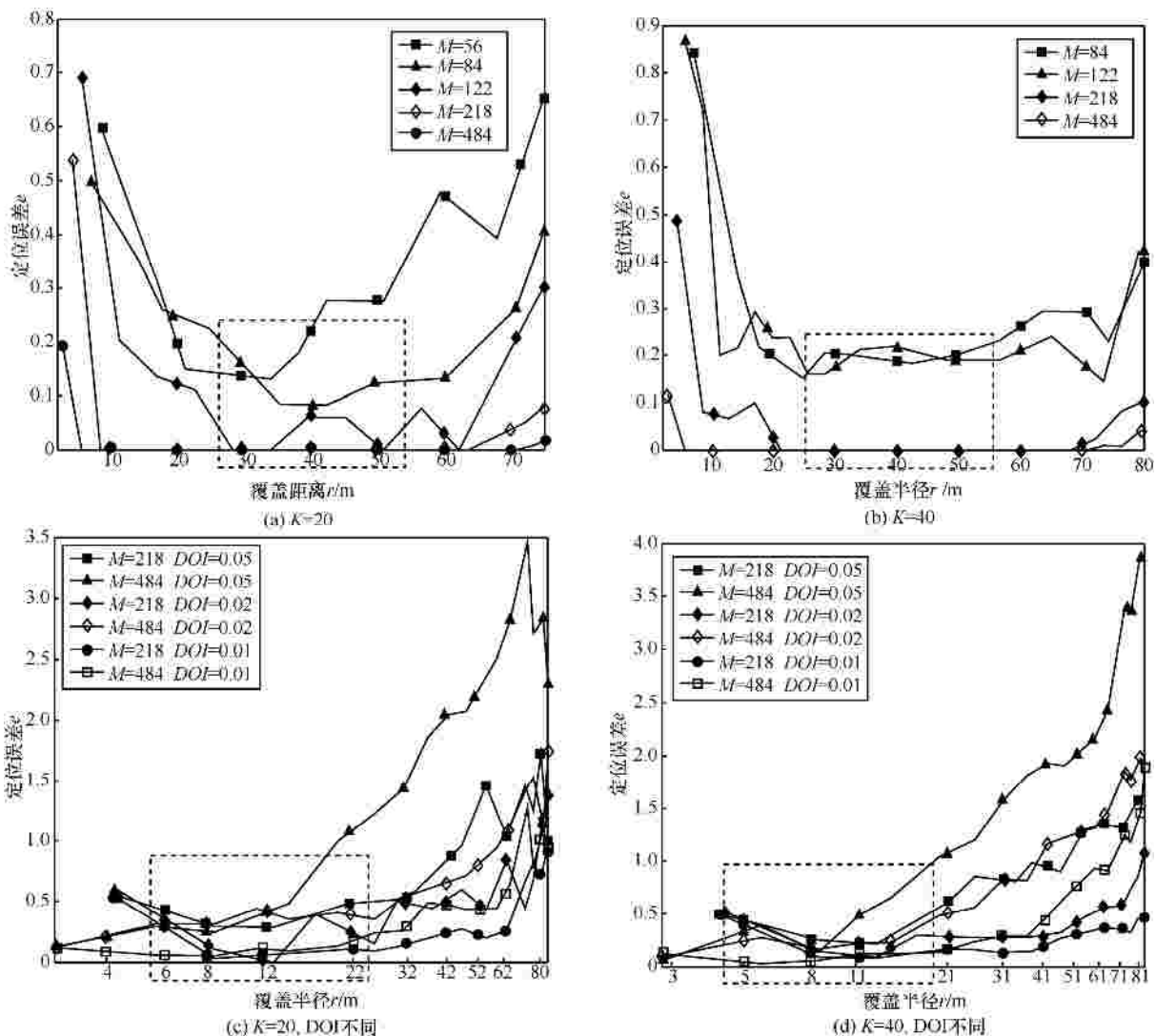


图 9 非 1-bit 量化的 CS 定位结果

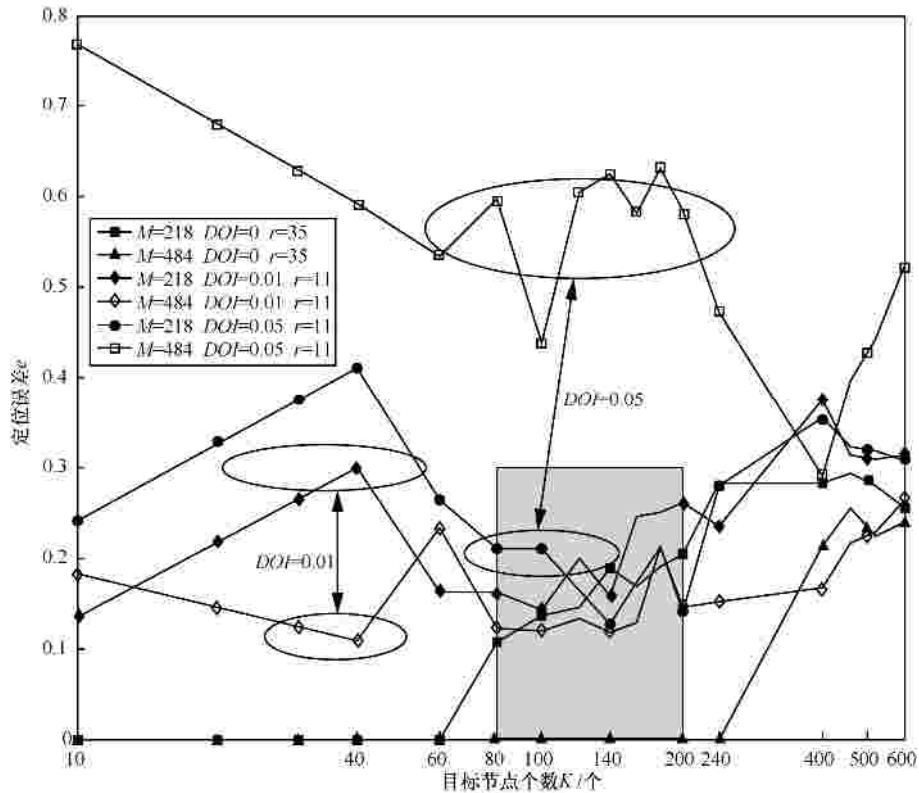


图 10 非 1-bit 量化的不同目标个数的仿真结果

的定位误差  $e$  大多低于 0.3,保证了目标节点的平均定位误差不会超过 1 个网格的距离。

### 5.3 1-bit 量化的实验结果与分析

在该实验中,所谓的 1-bit 量化只将白化的观测向量  $F$  量化为 +1 或 -1,而重构算法方法则运用 FPI 算法。如图 11(a)和图 11(b)所示,规则覆盖时,随着覆盖半径  $r$  的增加,定位误差  $e$  的变化同非 1-bit 量化一样,仍呈凹状。其中,  $K = 20$  时,  $M = 484$  的误差  $e$  基本为 0;而  $K = 40$  时,  $M = 484$  或  $M = 780$  的定位误差也是相对低的。同时,可以推断  $r$  位于(14,30)时,总体定位误差较小。

如图 11(c)和图 11(d)所示,非规则覆盖时,DOI 越高,  $e$  也越高。 $K = 20$ ,且  $6 < r < 16$  时,误差  $e$  都能维持最低的水平; $K = 40$  时,如果  $r$  位于区间(6,9)之间,1-bit 量化的 FPI 算法仍能保持最低的误差。综上,在模拟的复杂定位环境情况下,如果锚节点的覆盖半径能够维持在 15 m 左右,1-bit 量化的 CS 定位方法的效果最好。

考虑经济性情况下,1-bit 量化的 CS 方法也能够满足实际运用的需求。如图 12 所示,在满足误差低于 0.3 的情况下,目标个数  $K$  不宜大于 60,且 DOI 不高于 0.01。值得注意的是,1-bit 量化的平均

误差与非 1-bit 量化相比较,总体持平。

### 5.4 定位方法复杂度分析

目前,本文用于比较的定位方法,就其观测值的传送前量化而言,分为单比特量化(1-bit 量化连通度)、16-bit 量化(非 1-bit 量化连通度、MDS-MAP)以及 64-bit 量化(RSS-CS、DV-HOP)。如图 13 所示,在定位误差相同时,1-bit 量化所需的锚节点个数  $M$  只略多于非 1-bit 量化的方法,但从观测向量传送所需要的比特数发现,1-bit 量化所需的比特数却要少的多。如果直接发送白化后的观测向量  $F$ ,每个观测值则占用 1 个浮点型变量,其量化级别为 64 bit;如果传送连通度,则只占用 1 个整数型变量,其量化级别为 16 bit;如果仅传送 +1 或 -1,则仅占用 1 bit。

因此,在定位精度需求相同时,1-bit 量化所需的网络带宽远小于非 1-bit 量化。这意味着,在 DOI 越高时,通过增加锚节点密度,1-bit 量化的 CS 方法取得的定位效果更好,且代价更小。

### 5.5 与其他定位方法的比较分析

首先,对不同类型观测值的 CS 定位方法进行结果比对。目前的 CS 定位方法多将 RSS 作为观测值,这是因为基于对数衰落模型的 RSS 具有随距离

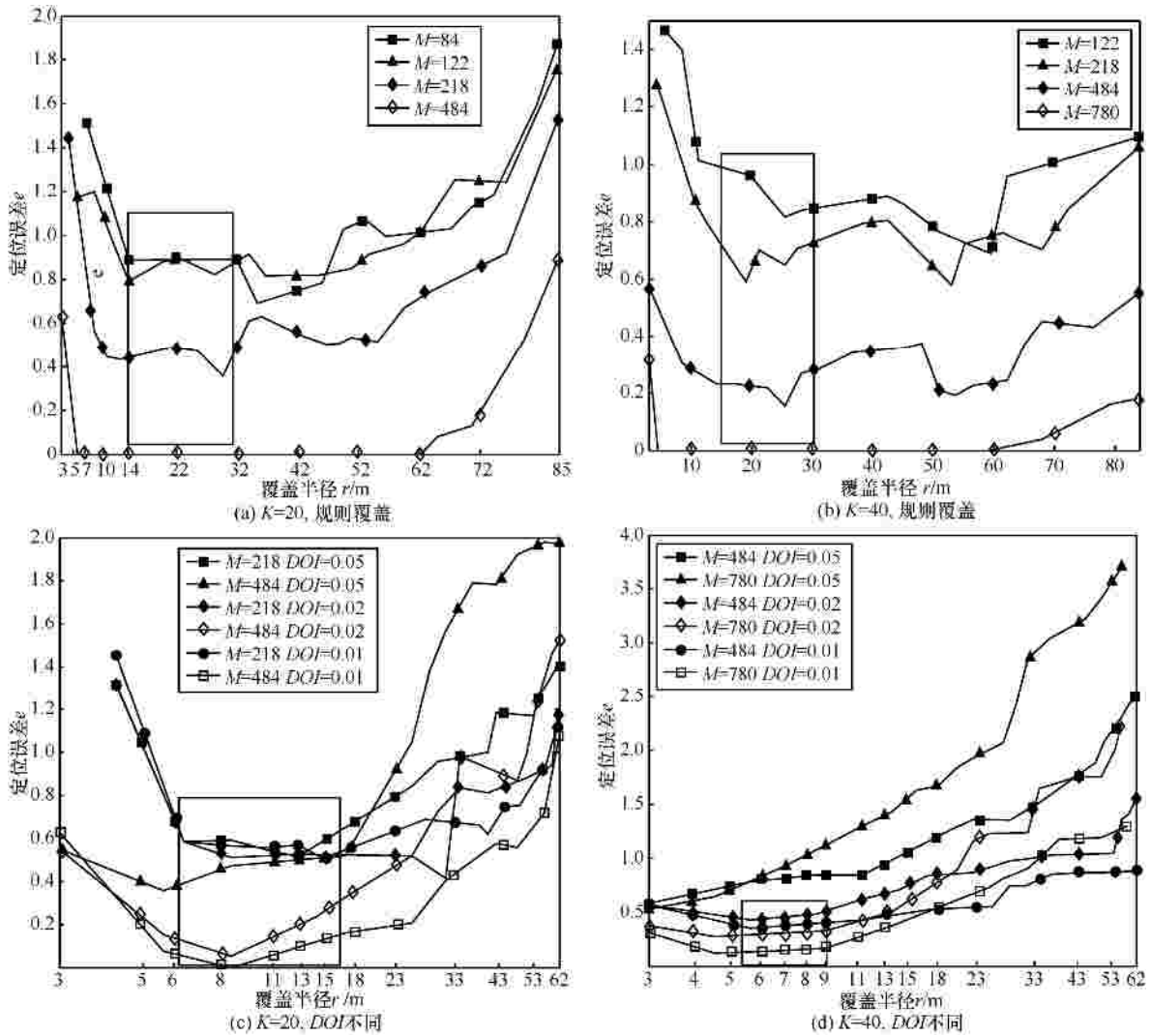


图 11 1-bit 量化的定位结果

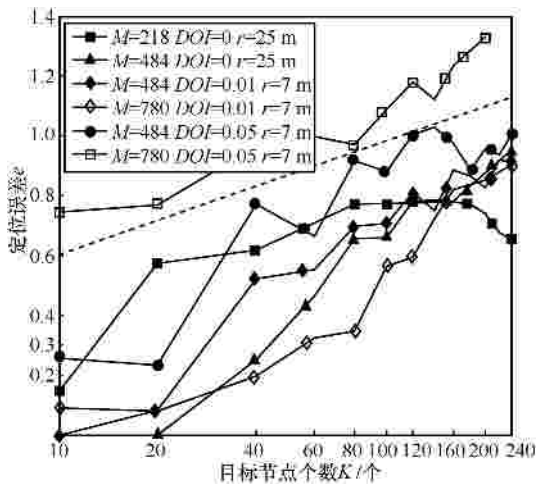


图 12 1-bit 量化的不同目标个数的仿真结果

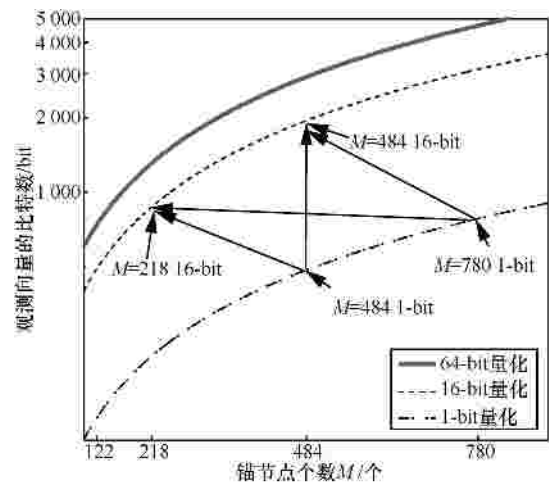


图 13 观测向量  $N$ -bit 量化的比特数

增加而呈幂次速率衰减的特征，利用其建立的感知矩阵能良好地满足 RIP 性质。利用 RSS 实现 CS 定

位，要求目标信号能覆盖全部锚节点，每个观测值均是来自多个目标的 RSS 叠加。

如图 14 所示,在锚节点规则覆盖的情况下, RSS-CS 方法的定位误差随着锚节点个数  $M$  增加而呈下降的趋势并不显著,特别当  $M$  很大时,误差  $e$  会反弹升高。而仅依赖连通的 CS 方法的定位效果最

好, 1-bit 量化连通度的方法只有当  $M$  足够大时,其定位误差才接近于非 1-bit 量化的 CS 定位方法。

如图 15 所示,在锚节点的非规则覆盖情况下,特别是  $DOI = 0.05$  时, RSS-CS 方法的定位误差异

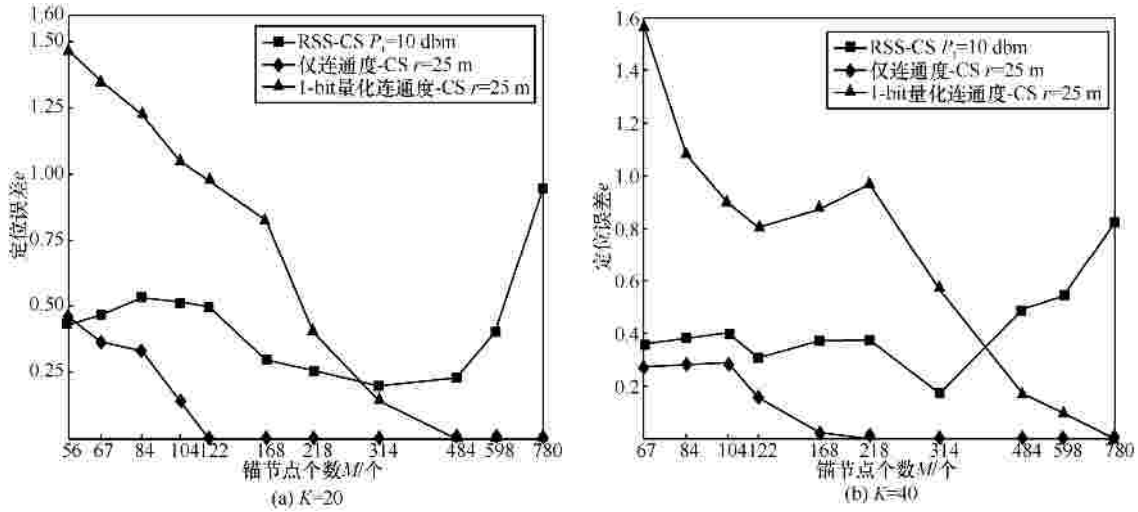


图 14 规则覆盖的方法比较

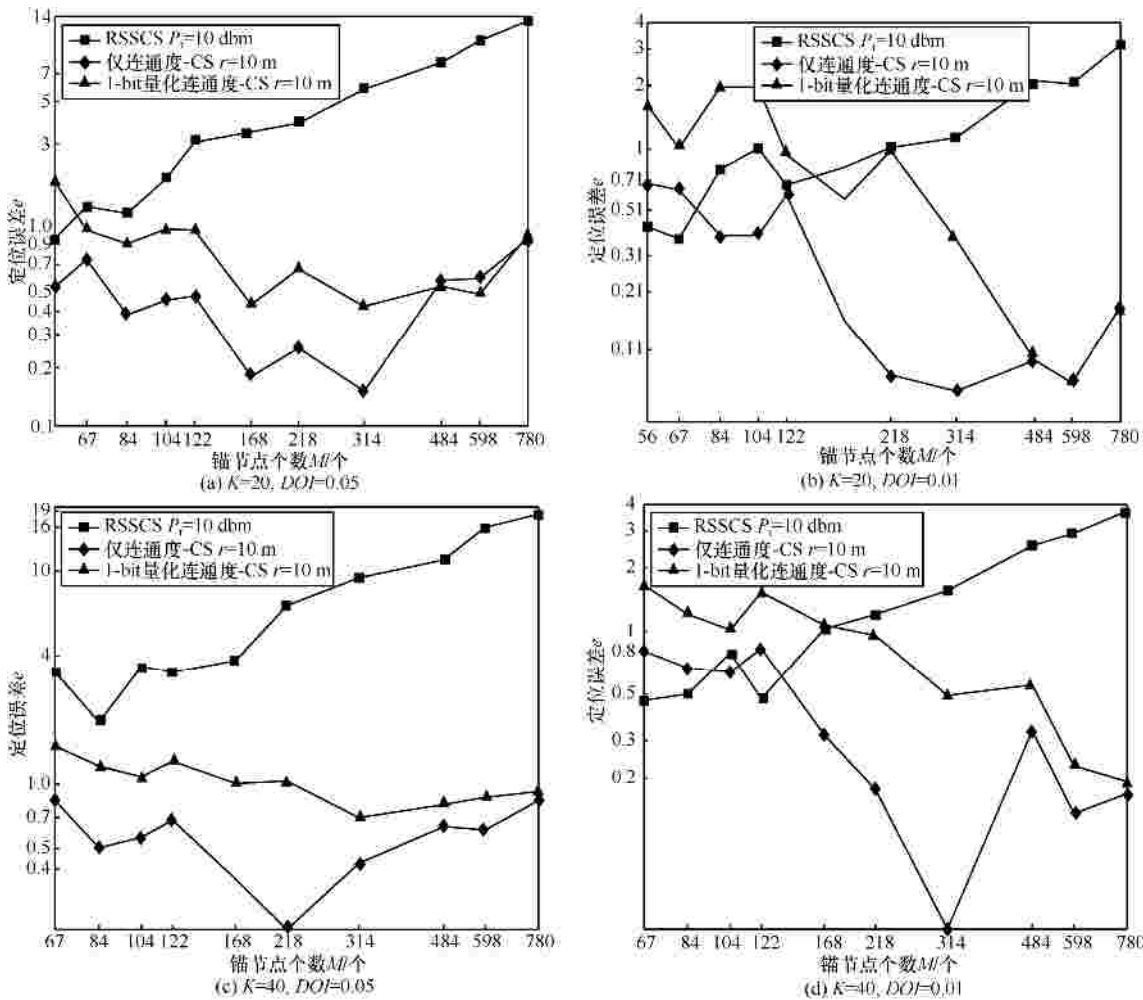


图 15 非规则覆盖的方法比较

常高。而仅连通度的 CS 方法仍然可以找出保证较低误差的锚节点个数，且目标节点个数  $K$  对误差的影响不大，相比较与其他 2 种 CS 定位方法，仅连通度的 CS 方法的顽健性更好。

如图 16 所示，当  $M = 484$  时，在与 MDS-MAP 和 DV-HOP 方法比较发现， $K = 20$  时，MDS-MAP 与仅连通度的 CS 方法的定位误差最小，MDS-MAP 能达到此效果的原因在于  $M$  很大，满足高密度节点分布的要求，但通信次数也达到  $O(K^3)$ ，而仅连通度的 CS 方法的通信次数只有  $O(K)$ ，其两者代价是无法相比。

### 6 结束语

本文仅依赖目标节点与锚节点的连通度，运用压缩感知原理实现室内的多目标定位。根据仿真实验结果，在锚节点分布密集的情况下，仅连

通度以及 1-bit 量化连通度的 CS 定位方法均能满足多目标定位的精度要求。通过不规则度仿真室内空间内的实际连通度，与其他算法比较得出，仅连通度的 CS 定位方法在相同不规则度的情况下，当锚节点的覆盖半径位于合理区间内，定位误差  $e$  能维持在 0.3 以下，这意味着目标的估计位置与实际位置平均偏移不会超过 1 个网格的距离。在计算复杂度相同的情况下，非 1-bit 的仅依赖连通度 CS 定位方法与常用的 RSS 定位方法相比，前者需要发送的比特数仅是后者的  $\frac{1}{4}$ 。基于

SDP 的稀疏向量求解算法在连通度被 1-bit 量化的情况下，仍能够准确重构位置向量。因此，在较大范围部署大量 WSN 目标节点时，仅依赖连通度的压缩感知定位相比其他定位方法，其代价更低，定位精度更高。

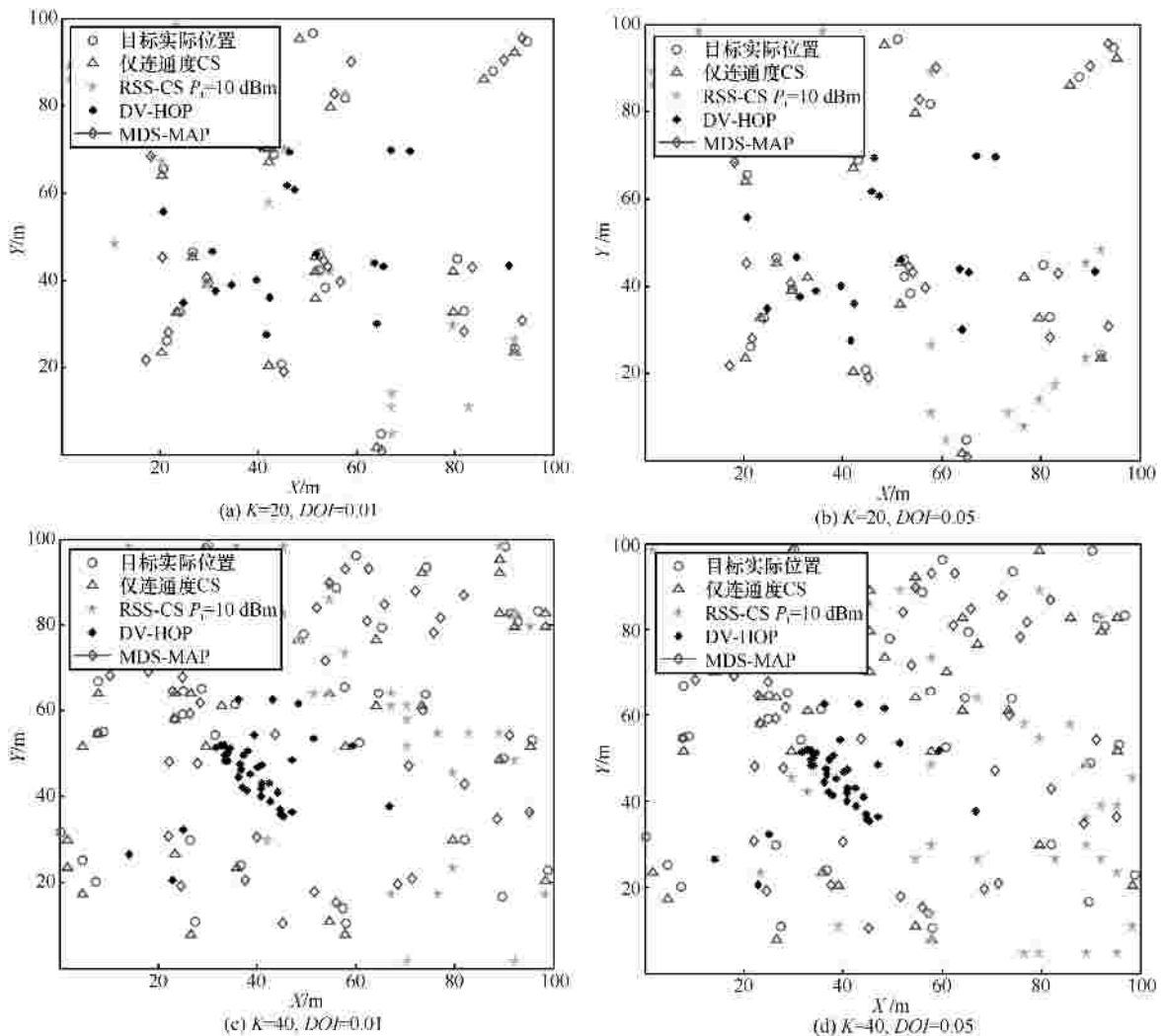


图 16 与其他定位方法比较

## 参考文献：

- [1] CHENG L, WU C D, ZHANG Y Z. Indoor robot localization based on wireless sensor networks[J]. IEEE Transactions on Consumer Electronics, 2011, 57(3): 1099-1104.
- [2] LIU H B, YANG J, SIDHOM S, et al. Accurate WiFi based localization for smartphones using peer assistance[J]. IEEE Transactions on Mobile Computing, 2014, 13(10): 2199-2214.
- [3] 朱剑, 赵海, 徐久强. 无线传感器网络中的定位模型[J]. 软件学报, 2011, 22(7): 1612-1625.  
ZHU J, ZHAO H, XU J Q. Localization model in wireless network[J]. Journal of Software, 2011, 22(7): 1612-1625.
- [4] AHMAD EI A, SLIM Z, SOFIENE A, et al. Low-cost localization for multi-hop heterogeneous wireless sensor networks[J]. IEEE Transactions on Signal Process, 2015, 13(7): 1199-1212.
- [5] VOLKAN C, PETRO B, RICHARD G. Near-optimal bayesian localization via incoherence and sparsity[C]/International Conference of the IEEE Information Processing in Sensor Networks. San Francisco, c2009:205-216.
- [6] ZHANG B W, CHENG X Z, ZHANG N, et al. Sparse target counting and localization in sensor networks based on compressive sensing[C]/International Conference of the IEEE Computer Communication (INFOCOM). Shanghai, China, c2011:2255-2263.
- [7] 韩江洪, 刘磊, 卫星. 信号场强压缩感知的传感器定位方法研究[J]. 仪器仪表学报, 2014, 35(6): 1201-1208.  
HAN J H, LIU L, WEI X. Research on sensor localization method based on compressive sensing of signal strength[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2014, 35(6): 1201-1208.
- [8] 赵春晖, 许云龙, 黄辉. 基于 LU 分解的稀疏目标定位算法[J]. 电子与信息学报, 2013, 35(9): 2234-2239.  
ZHAO C H, XU Y L, HUANG H. Localization algorithm of sparse targets based on LU-decomposition[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2013, 35(9): 2234-2239.
- [9] 刘盼盼, 李雷, 王浩宇. 压缩感知中基于变尺度法的贪婪重构算法研究[J]. 通信学报, 2014, 35(12): 98-105.  
LIU P P, LI L, WANG H Y. Research on greedy reconstruction algorithms of compressed sensing based on variable metric method[J]. Journal on Communications, 2014, 35(12): 98-105.
- [10] XIAO F, SHA C H, CHEN L, et al. Noise-tolerant localization from incomplete range measurements for wireless sensor networks[C]/ International Conference of the IEEE Computer Communication (INFOCOM). Hong Kong, China, c2015:2794-2802.
- [11] GIORGIO Q, RICCARDO M, GIANLUIGI P, et al. Sensing, compression and recovery for wsns: sparse signal modeling and monitoring framework[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2012, 11(10): 3447-3461.
- [12] XIAO J, LUO Z, GIANNAKIS G B. Performance bounds for the rate-constrained universal decentralized estimators[J]. IEEE Signal Process Letters, 2007, 14(1): 47-50.
- [13] RIBEIRO A, GIANNAKIS G B. Bandwidth-constrained distributed estimation for wireless sensor networks – part i: Gaussian case[J]. IEEE Transactions on Signal Process, 2006, 54(3): 1131-1143.
- [14] WANG X H, QIU J, FAN J, et al. MDS-based localization scheme for large-scale WSNs within sparse anchor nodes[C]/International Conference on Communications (ICC). London, UK, c2015: 6609-6614.
- [15] 杨辉强, 李德英, 李政. 定向传感器网络中的最小化覆盖间隙和最大化网络生命时间问题的研究[J]. 电子学报, 2010, 38(2): 138-141.  
YANG H Q, LI D Y, LI Z. Minimum coverage breach and maximum network lifetime in directional sensor networks[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(2): 138-141.
- [16] CANDES E, ROMBERG J, TAO T. Robust uncertainty principle: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 489-509.
- [17] ZHOU G, HE T, SUDHA K, et al. Models and solutions for radio irregularity in wireless sensor networks[J]. ACM Transactions on Sensor Networks, 2006, 2(2): 221-262.
- [18] 戴琼海, 付长军, 季向阳. 压缩感知研究[J]. 计算机学报, 2011, 34(3): 425-434.  
DAI Q H, FU C J, JI X Y. Research on compressed sensing[J]. Chinese Journal of Computers, 2011, 34(3): 424-434.

## 作者简介：



刘磊 (1982-), 男, 安徽合肥人, 合肥工业大学博士生, 主要研究方向为压缩感知和无线传感器网络定位。



张建军 (1963-), 男, 浙江宁波人, 合肥工业大学教授、硕士生导师, 主要研究方向为汽车电子、物联网工程、计算机集成制造。



陆阳 (1967-), 男, 安徽合肥人, 合肥工业大学教授、博士生导师, 主要研究方向为分布式控制、无线传感器网络、可靠性工程。



卫星 (1980-), 男, 安徽合肥人, 合肥工业大学教授、硕士生导师, 主要研究方向为物联网工程、离散事件动态系统等。



韩江洪 (1954-), 男, 江苏南京人, 合肥工业大学教授、博士生导师, 主要研究方向为计算机控制、离散事件控制理论和无线通信技术与理论等。